



TITLE:

# 実関数の帰納推論(I): 厳密推論 (アルゴリズムと計算の理論)

AUTHOR(S):

有川, 節夫; 廣渡, 栄寿

---

CITATION:

有川, 節夫 ...[et al]. 実関数の帰納推論(I): 厳密推論 (アルゴリズムと計算の理論). 数理解析研究所講究録 1998, 1041: 199-204

ISSUE DATE:

1998-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/62053>

RIGHT:

## 実関数の帰納推論 (I) : 厳密推論

Kalvis Apsītis<sup>1</sup>

Setsuo Arikawa<sup>2</sup>  
(有川 節夫)

Rūsiņš Freivalds<sup>3</sup>

Eiju Hirowatari<sup>2</sup>  
(廣渡 栄寿)

Carl H. Smith<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Computer Science, University of Maryland, USA. : {kalvis,smith}@cs.umd.edu.

<sup>2</sup>Department of Informatics, Kyushu University. : {arikawa,eiju}@i.kyushu-u.ac.jp.

<sup>3</sup>Institute of Mathematics and Computer Science, University of Latvia, Latvia. : rusins@cclu.lv.

### 1 始めに

本稿では、例からの実関数の帰納推論について議論する。この問題に取り組むために最も重要な問題は、計算可能な実数や実関数をどのように表現するかということである。実数は、その実数に収束していく有理数の列によって表現される。従って、実関数は、そのような有理数の列をもう一つの有理数の列に写すような関数として捉えることができる。計算可能実関数は、Grzegorzczyk [3] によって最初に定式化され、その後、本質的には等しいが表現の異なる幾つかの他の定式化が提案されている [4, 6, 8, 10].

実関数の例は、実験や観測などによって得られた数値データである。このような数値データには常に誤差が含まれており、学習目標である実関数の正確な値ではない。しかし、誤差限界を考え合わせるとその値の範囲を特定することができ、実際の値を含む閉区間として表すことができる。この実数の表現の仕方は、区間解析の分野で区間数として知られている [1, 7]. 従って、実関数は、区間数を区間数へ写すような区間関数としても捉えることができる。区間関数  $h$  は、閉区間  $I$  を入力として受け取り、区間  $I$  に関する情報だけを用いて、 $h(I) \subseteq J$  となる閉区間  $J$  を出力する関数である。

実関数は、計算可能実関数と区間関数の両方の特徴を合わせもつべきであり、そのような特徴をもつ関数として、帰納的実関数を提案する。帰納的実関数は、計算可能な実係数をもつ初等関数を表現することができる。また、誤差を含む数値データから実関数を厳密推論する学習モデルを提案し、どのような実関数の集合が帰納推論可能であるかについて議論する。推論機械によって出力される全ての推測が今までに受け取ったデータに無矛盾であるような推論の成功基準についても議論する。

### 2 準備

$N$  を自然数全体の集合、 $Q$  を有理数全体の集合、 $R$  を実数全体の集合とする。特に、 $Q^+$  を正の有理数全体の集合とする。

定義 1  $S_0, S \subseteq R$  とし、 $h_0$  を  $S_0$  から  $R$  への関数、 $h$  を  $S$  から  $R$  への関数とする。  $S_0 \subseteq S$  かつ、任意の  $x \in S_0$  に対して  $h_0(x) = h(x)$  となるとき、 $h_0$  が  $h$  の制限 ( $h$  が  $h_0$  の拡張) であるといい、 $h_0 = h|_{S_0}$  と表す。

帰納的実数とは、計算可能な実数のことであり、その実数に収束する有理数列によって表わされる [5, 9, 11, 12, 13]. 本稿では、帰納的実数  $x$  を、それぞれ  $x$  と 0 に収束する以下のような計算可能な有理数列の組として捉える。

定義 2  $f$  を  $N$  から  $Q$  への関数、 $g$  を  $N$  から  $Q^+$  への関数とする。関数  $f$  と  $g$  が次の条件を満たすとき、組  $\langle f, g \rangle$  は、 $x$  の近似表現であるという。

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = 0.$$

$$2. \text{ 任意の } n \in N \text{ に対して, } |f(n) - x| \leq g(n).$$

また, 関数  $f$  と  $g$  が帰納的であるとき, 実数  $x$  は帰納的であるという.

$f(n)$  は, 実数  $x$  の近似値を表わし,  $g(n)$  は,  $x$  と  $f(n)$  の誤差を表わす. 明らかに, 有理数  $r$  は帰納的実数である.

例 1 Napier 数  $e$  は, 帰納的実数である. 実際に, 関数  $f$  と  $g$  を次のように定義すればよい.

$$f(n) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}, \quad g(n) = \frac{3}{(n+1)!}.$$

### 3 帰納的実数関数

実数は, 収束していく有理近似値とその誤差の組として表わされるが, 収束していく閉区間列として捉えることもできる. そこで, 閉区間上の計算可能関数として表される帰納的実数関数を提案する.

本稿では, 混同することがないとき, 端点が有理数である有理区間を単に区間と呼ぶ.

定義 3  $S \subseteq R$  をある関数の定義域とする.  $S$  の有理化領域  $Dom_S$  は, 以下の条件を満たす  $Q \times Q^+$  の部分集合である.

1. 任意の  $\langle p, \alpha \rangle \in Dom_S$  に対して,  $[p - \alpha, p + \alpha] \subseteq S$ .
2. 任意の  $x \in S$  に対して,  $x \in [p - \alpha, p + \alpha]$  となる  $\langle p, \alpha \rangle \in Dom_S$  が存在する. 特に,  $x$  が  $S$  の内点であるとき,  $x \in (p - \alpha, p + \alpha)$  となる  $\langle p, \alpha \rangle \in Dom_S$  が存在する.
3.  $\langle p, \alpha \rangle \in Dom_S$  かつ  $[q - \beta, q + \beta] \subseteq [p - \alpha, p + \alpha]$  であるとき,  $\langle q, \beta \rangle \in Dom_S$  となる.

同じ定義域  $S$  に対して, 異なる有理化領域を構成できる. また,  $S$  が有理閉区間の和集合として表すことができる場合のみ, 有理化領域が存在する.

定義 4  $S \subseteq R$  とし,  $h$  を  $S$  から  $R$  への関数とする. さらに,  $S$  の有理化領域  $Dom_S$  が存在するとする.  $h$  の有理化関数  $A_h$  は, 次の条件を満たす  $Dom_S$  から  $Q \times Q^+$  への計算可能関数である.

任意の  $x \in S$  と  $x$  の任意の近似表現  $\langle f, g \rangle$  に対して, 実数  $h(x)$  のある近似表現  $\langle f_0, g_0 \rangle$  が存在し,  $\langle f(n), g(n) \rangle \in Dom_S$  ならば  $A_h(\langle f(n), g(n) \rangle) = \langle f_0(n), g_0(n) \rangle$  となる.

$A_h$  を  $h$  を計算するアルゴリズムと呼ぶこともある.  $f$  と  $g$  が帰納的であるならば,  $f_0$  と  $g_0$  も帰納的である.

定義 5  $S \subseteq R$  とし,  $h$  を  $S$  から  $R$  への関数とする.  $S$  の有理化領域  $Dom_S$  と  $h$  の有理化関数  $A_h$  が存在するとき,  $h$  は帰納的実数関数であるという. ただし, 全ての  $\langle p, \alpha \rangle \notin Dom_S$  に対して,  $A_h(\langle p, \alpha \rangle)$  は停止しないとす.

例 2 任意の帰納的実数  $r$  に対して, 定置関数  $c_r(x) = r$  は帰納的実数関数である.

定理 1  $h: S \rightarrow R$  を帰納的実数関数とし,  $Dom_S$  を  $S$  の有理化領域,  $A_h: Dom_S \rightarrow Q \times Q^+$  を  $h$  の有理化関数とする. このとき,  $h([p - \alpha, p + \alpha]) \subseteq [q - \beta, q + \beta]$  となる. ただし,  $\langle p, \alpha \rangle \in Dom_S$  かつ  $\langle q, \beta \rangle = A_h(\langle p, \alpha \rangle)$  である.

定理 2  $h: S \rightarrow R$  が帰納的実数関数であるとき,  $h$  は  $S$  上で連続である.

定理 3  $h: S \rightarrow R$  が帰納的実数関数であることと,  $S \subseteq R$  が有理閉区間の帰納的集合の和として表されることは同値である.

次の定理は, 部分計算可能実関数 [6] と帰納的実数関数の違いは, 取り得る定義域の違いだけであることを示している.

定理 4 1.  $h: S \rightarrow R$  が部分計算可能実関数であるならば,  $h$  は帰納的実数関数である.

2.  $h: S \rightarrow R$  が帰納的実数関数であるならば,  $h|_{S'}$  は部分計算可能実関数である. ただし,  $S'$  は  $S$  の全ての内点の集合である.

## 4 厳密推論

### 4.1 学習モデル

観測データには常に誤差が含まれており, 正確な値  $x$  を得ることはできない. しかし,  $x \in [p - \alpha, p + \alpha]$  となるような  $x$  の近似値  $p$  と誤差  $\alpha$  を得ることは可能である. そのような有理数の組  $\langle p, \alpha \rangle$  を  $x$  のデータと呼ぶ.

定義 6  $S \subseteq R$  とし,  $h$  を  $S$  から  $R$  への関数とする. ある  $x \in S$  が存在し,  $\langle p, \alpha \rangle$  と  $\langle q, \beta \rangle$  が, それぞれ  $x$  と  $h(x)$  のデータであるとき,  $\langle \langle p, \alpha \rangle, \langle q, \beta \rangle \rangle$  は  $h$  のデータであるという.

定義 7  $S \subseteq R$  とし,  $h$  を  $S$  から  $R$  への関数とする. また,  $w_1, w_2, \dots$  を  $h$  のデータの無限列とする. 任意の  $x \in S$  と任意の  $\zeta > 0$  に対して, あるデータ  $w_k = \langle \langle p_k, \alpha_k \rangle, \langle q_k, \beta_k \rangle \rangle$  が存在し,  $x \in [p_k - \alpha_k, p_k + \alpha_k]$ ,  $h(x) \in [q_k - \beta_k, q_k + \beta_k]$  かつ  $\alpha_k, \beta_k \leq \zeta$  が成り立つとき,  $w_1, w_2, \dots$  を  $h$  の例示という. また, そのような例示を  $\sigma$  で表し,  $\sigma$  の最初の  $n$  個のデータ  $w_1, w_2, \dots, w_n$  を  $\sigma[n]$  で表す.

$h$  の各データ  $\langle \langle p, \alpha \rangle, \langle q, \beta \rangle \rangle$  は,  $h$  のグラフ上のある点  $(x, h(x))$  を含む四角形  $[p - \alpha, p + \alpha] \times [q - \beta, q + \beta]$  として捉えることができる.

定義 8 推論機械は, 次々と入力要求し, 帰納的実数関数を計算するアルゴリズムを出力する手続きのことである. これらの出力されるアルゴリズムを推測という.

推論機械  $M$  と有限データ列  $\sigma[n] = w_1, w_2, \dots, w_n$  に対して,  $\sigma[n]$  を入力データとして受けとった後の  $M$  の最後の推測を  $M(\sigma[n])$  で表す. 本稿では, 任意の  $n \in N$  に対して,  $M(\sigma[n])$  が定義されているとする.

定義 9  $\sigma$  をある関数の例示とし,  $M$  を推論機械とする. ある  $n_0 \in N$  に対して,  $m \geq n_0$  ならば  $A_h = M(\sigma[m])$  となると,  $M$  によって出力される推測の列  $\{M(\sigma[n])\}$  は, アルゴリズム  $A_h$  に収束するという.

帰納的実数関数は, 帰納推論の分野で扱われてきた自然数上の帰納的関数よりも複雑なものである. その理由は, 自然数と比較して, 実数は, たとえ帰納的であったとしてもそれ自身複雑な表現をしているからである. そこで, 実数関の学習可能性を議論する前に, まず, 実数そのものや実関数の定義域が推論できるかどうかについて考える. 例として, 各帰納的実数  $x$  に対して,  $\rho_x = \langle q_1, \beta_1 \rangle, \langle q_2, \beta_2 \rangle, \dots$  を次のような無限列とする.

1. 任意の  $k \in N^+$  に対して,  $\langle q_k, \beta_k \rangle \in Q \times Q^+$  かつ  $x \in [q_k - \beta_k, q_k + \beta_k]$ .

2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0$ .

例 3  $V$  を  $N$  から  $\{0, 1\}$  への全ての帰納的関数の集合とする. 任意の  $\varphi \in V$  に対して, 帰納的実数  $x_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \cdot 3^{-n}$  を構成することができる. しかし, ある  $\varphi \in V$  に対して, 無限列  $\rho_{x_\varphi} = \langle q_1, \beta_1 \rangle, \langle q_2, \beta_2 \rangle, \dots$  を入力として受け取り,  $x_\varphi$  の近似表現を構成するアルゴリズムは存在しない.

実数  $x_\varphi$  の近似表現が与えられたとき、 $\varphi$  を計算するプログラムを構成することができる。従って、もし全ての  $x_\varphi$  に対して、 $x_\varphi$  の近似表現を構成するアルゴリズムが存在するならば、集合  $V$  を学習することが可能となり、[2] に矛盾する。例 3 によって、定置関数全体の集合すら学習することができないことがわかる。従って、本稿では、帰納的実数関数の帰納的に枚挙可能な集合に着目する。

次に、定義域の学習について考える。 $h: S \rightarrow R$  を  $h(x) = 0$  によって定義される帰納的実数関数とする。この関数  $h$  を学習することの主な困難さは、定義域  $S$  を学習することにある。しかし、定理 3 によって、定義域  $S$  は、閉区間の帰納的集合の和として表されるので、例 3 と同様に学習不可能である。従って、関数とその拡張を区別せずに、目標関数  $h$  そのものではなく  $h$  の拡張を学習することを目標にする。

## 4.2 帰納的実数関数の学習

推論機械  $\mathcal{M}$  が関数  $h$  を厳密推論することに成功するとは、 $\mathcal{M}$  によって出力される推測の列がアルゴリズム  $\mathcal{A}_{h'}$  に収束し、 $\mathcal{A}_{h'}$  によって計算される関数  $h'$  が学習目標である関数  $h$  を同定することができる場合のことをいう。本節では、“推論機械  $\mathcal{M}$  が目標関数  $h$  を厳密推論する”という成功基準として、*REALEX* を提案する。関数とその拡張を区別しないので、推論機械が学習目標である関数の拡張に収束した場合、学習が成功したという。

$\mathcal{T}$  を帰納的実数関数の集合とする。ある帰納的関数  $\Psi$  が存在し、アルゴリズム  $\Psi(1), \Psi(2), \dots$  によって計算される全ての関数の集合が  $\mathcal{T}$  と等しいとき、 $\mathcal{T}$  は帰納的に枚挙可能であるという。

**定義 10**  $h$  を帰納的実数関数とする。ある推論機械  $\mathcal{M}$  が存在し、任意の  $h$  の例示  $\sigma$  に対して、 $\mathcal{M}$  によって出力される推測の列  $\{A_{h_n}\}$  が  $h$  の拡張を計算するアルゴリズム  $\mathcal{A}_h$  に収束するとき、 $\mathcal{M}$  は極限において  $h$  を学習するといい、 $h \in \text{REALEX}(\mathcal{M})$  と表す。

帰納的実数関数の集合  $\mathcal{T}$  に対して、任意の  $h \in \mathcal{T}$  を極限において学習する推論機械  $\mathcal{M}$  が存在するとき、 $\mathcal{T}$  は *REALEX* 学習可能であるという。また、*REALEX* によって、*REALEX* 学習可能な全ての集合のクラスを表す。

**定理 5**  $\mathcal{T}$  を帰納的実数関数の帰納的に枚挙可能な集合とする。さらに、全ての関数  $h \in \mathcal{T}$  が同じ有理開区間が有理閉区間  $I$  上で定義されているとする。このとき、 $\mathcal{T}$  は *REALEX* 学習可能である。

任意の関数の集合  $\mathcal{T}$  とある有理区間  $I$  に対して、定義域が  $I$  を含む  $\mathcal{T}$  の中の全ての関数の集合を  $\mathcal{T}_I$  で表す。

**補題 1**  $\mathcal{T}$  を帰納的実数関数の帰納的に枚挙可能な集合とし、 $I$  を有理閉区間とする。 $\mathcal{T}_I \neq \emptyset$  であるとき、 $\mathcal{T}_I$  もまた帰納的に枚挙可能である。

**系 1**  $\mathcal{T}$  を帰納的実数関数の帰納的に枚挙可能な集合とし、 $I$  を有理閉区間とする。このとき、 $\mathcal{T}_I$  は *REALEX* 学習可能である。

## 4.3 無矛盾学習

Wiehagen [14] によって最初に導入された無矛盾学習は、推論機械によって出力される全てのプログラムが今までに受け取ったデータに矛盾しないことを要求している。本稿では、この無矛盾学習を帰納的実数関数の場合に拡張する。

無矛盾性の定義をごく自然に拡張すると次のようになる。推論機械によって出力される各推測  $A_{h_n}$  が今までに受け取ったデータ  $\sigma[n]$  に無矛盾であるとは、全てのデータ  $w \in \sigma[n]$  が関数  $h_n$  のデータである場合のことをいう。しかし、このような制限は実際的ではない。なぜならば、一般に、 $h_n$  を計算するアルゴリズム  $\mathcal{A}_{h_n}$  とデータの集合  $\sigma[n]$  が与えられたとき、そのような無矛盾性を判定することはできないからである。

例 4  $\mathcal{A}_{c_r}$  を定置関数  $c_r$  を計算するアルゴリズムとし,  $\sigma$  をある関数の例示とする. さらに, ある  $n \in N$  が存在し,  $\sigma[n]$  がただ一つのデータ  $\langle\langle p, \alpha \rangle, \langle q, \beta \rangle\rangle$  を含むとする.  $C_r$  が  $\sigma[n]$  に無矛盾であるかどうかを判別するには,  $|r - q| \leq \beta$  が成立するかどうかを確かめればよい. しかし, 実数  $r$  の近似表現から,  $r$  と  $q + \beta, q - \beta$  の大小関係が判別できない場合がある [6].

$\mathcal{A}_h$  を関数  $h: S \rightarrow R$  を計算するアルゴリズムとし,  $\sigma$  をある関数の例示とする. さらに, ある  $n \in N$  が存在し,  $\sigma[n]$  がただ一つのデータ  $\langle\langle p, \alpha \rangle, \langle q, \beta \rangle\rangle$  を含み, かつ  $[p - \alpha, p + \alpha] \not\subseteq S$  であるとする.  $h$  が  $\sigma[n]$  に無矛盾であるか否かを判定できるためには,  $[p - \alpha, p + \alpha] \cap S$  が有理化領域  $Dom_S$  の閉区間の有限和として表される必要がある.  $S$  は有理閉区間の帰納的集合の和として表されるので, 無矛盾であるかどうかを判定できない場合がある. しかし,  $[p - \alpha, p + \alpha] \subseteq S$  であるかどうかは判定することができる.

以上の議論から, 本稿では, 無矛盾性を次のように定義する. 推論機械によって出力される各推測  $\mathcal{A}_{h_n}$  が今まで受け取ったデータ  $\sigma[n]$  に無矛盾であるとは,  $[p - \alpha, p + \alpha] \subseteq S$  となる任意のデータ  $\langle\langle p, \alpha \rangle, \langle q, \beta \rangle\rangle \in \sigma[n]$  に対して,  $h_n(x) \in [q - 2\beta, q + 2\beta]$  となる  $x \in [p - \alpha, p + \alpha]$  が存在する場合のことをいう. 正確に無矛盾であることは推測できないが, 少なくとも学習目標である関数  $h$  に対して,  $h_n(x) \in [h(x) - 3\beta, h(x) + 3\beta]$  となる  $x \in [p - \alpha, p + \alpha]$  が存在する.

定義 11  $h: S \rightarrow R$  を帰納的実数関数とする. ある推論機械  $\mathcal{M}$  が存在し, 任意の  $h$  の例示  $\sigma$  に対して, 次の条件を満たすとき,  $\mathcal{M}$  は極限において  $h$  を無矛盾に学習するといひ,  $h \in REALCONS(\mathcal{M})$  と表す.

1.  $h \in REALEX(\mathcal{M})$ .
2. 任意の推測  $\mathcal{A}_{h_n}$  と  $[p - \alpha, p + \alpha] \subseteq S$  となる任意のデータ  $\langle\langle p, \alpha \rangle, \langle q, \beta \rangle\rangle \in \sigma[n]$  に対して,  $h_n(x) \in [q - 2\beta, q + 2\beta]$  となる  $x \in [p - \alpha, p + \alpha]$  が存在する.

帰納的実数関数の集合  $\mathcal{T}$  に対して, 任意の  $h \in \mathcal{T}$  を極限において無矛盾に学習する推論機械  $\mathcal{M}$  が存在するとき,  $\mathcal{T}$  は  $REALCONS$  学習可能であるという. また,  $REALCONS$  によって,  $REALCONS$  学習可能な全ての集合のクラスを表す.

定理 6  $\mathcal{T}$  を帰納的実数関数の帰納的に枚挙可能な集合とする. さらに, 全ての関数  $h \in \mathcal{T}$  が同じ有理閉区間  $I$  上で定義されているとする. このとき,  $\mathcal{T}$  は  $REALCONS$  学習可能である.

定理 1 と定理 2 によって, 本稿で提案する帰納的実数関数は, 区間数上の計算可能関数 [1, 7] に要求される条件を満たしている.

$h_1$  と  $h_2$  を帰納的実数関数とし, 以下のような合成関数  $h_1 + h_2, h_1 \times h_2, h_1 \circ h_2$  について考える.

$$\begin{aligned} (h_1 + h_2)(x) &= h_1(x) + h_2(x), \\ (h_1 \times h_2)(x) &= h_1(x) \times h_2(x), \\ (h_1 \circ h_2)(x) &= h_1(h_2(x)). \end{aligned}$$

帰納的実数関数の定義から, 合成関数に関して次の定理が導かれる.

定理 7  $h_1$  と  $h_2$  をある开区間の和集合上で定義された帰納的実数関数とする. このとき, 合成関数  $h_1 + h_2, h_1 \times h_2, h_1 \circ h_2$  もまた, ある开区間の和集合上で定義された帰納的実数関数となる.

系 2  $U$  を帰納的実数の帰納的に枚挙可能な集合とし,  $\mathcal{T}$  を係数が  $U$  の要素である初等関数全体の集合とする. このとき, 任意の有理閉区間  $I$  に対して,  $\mathcal{T}_I$  は  $REALCONS$  学習可能である.

## 5 終りに

本稿では, 帰納的実数関数を提案し, 計算可能実関数 [6] や区間関数 [1, 7] と比較することによって, その特徴を示した. また, 目標関数の誤差を含む数値データを入力として受け取り, 帰納的実数関数を計算するアルゴリズムを仮説として出力する学習モデルを提案した. Gold の極限同定 [2] と Wiehagen の無矛盾学習 [14] の成功基準を帰納的実数関数の場合へ拡張し, それぞれの成功基準のもとで, 学習可能となる関数の集合を同定した. 例として, 帰納的実数の帰納的に枚挙可能な集合から係数が選ばれている, 有理閉区間上で定義される初等関数全体は, 無矛盾学習可能であることを示した.

## 参考文献

- [1] G. Alefeld and J. Herzberger. *Introduction to Interval Computations*. Academic Press, London, England, 1983.
- [2] E.M. Gold. Language identification in the limit. *Information and Control*, Vol. 10, pp. 447–474, 1967.
- [3] A. Grzegorzcyk. Computable functionals. *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 42, pp. 168–202, 1955.
- [4] A. Grzegorzcyk. On the definitions of computable real continuous functions. *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 44, pp. 61–71, 1957.
- [5] K. Ko. On the definitions of some complexity classes of real numbers. *Mathematical Systems Theory*, Vol. 16, pp. 95–109, 1983.
- [6] K. Ko. *Complexity Theory of Real Functions*. Birkhäuser, 1991.
- [7] R.E. Moore. *Interval Analysis*. Prentice-Hall, 1966.
- [8] A. Mostowski. On computable sequences. *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 44, pp. 37–51, 1957.
- [9] R. Péter. *Recursive functions (third revised edition)*. Academic Press, New York and London, 1967.
- [10] M. B. Pour-El and J.I. Richards. *Computability in Analysis and Physics*. Springer-Verlag, 1988.
- [11] H.G. Rice. Recursive real numbers. In *Proceedings of the American Mathematical Society* Vol. 5, pp. 784–791, 1954.
- [12] R.M. Robinson. Review of “R. Péter : ‘Rekursive funktionen’”, *Académiai Kiadó (Akademischer Verlag)*, Budapest, 1951. *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 16, pp. 280–282, 1951.
- [13] A.M. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. In *Proceedings of the London Mathematical Society* Vol. 42, pp. 230–265, 1936.
- [14] R. Wiehagen. Limes-erkennung rekursiver funktionen durch spezielle strategien. *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik*, Vol. 12, pp. 93–99, 1976.